Álgebra lineal

Taller 3

Prodcto cruz; planos y rectas en $\mathbb{R}^3$.

Fecha de entrega: 01 de septiembre de 2022

1. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

1 pts. (a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a E y encuentre tres puntos que **no** pertenecen a E.

1 pts. (b) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ paralelos a E y no paralelos entre si.

1 pts. (c) Encuentre un punto en E y un vector $\vec{n}$ que es ortogonal a E.

2 pts. (d) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos a E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

¡Pruebe todas sus respuestas!

8 pts. 2. Para los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, -1)$ y los siguientes planos E:

- Encuentre la ecuación del plano.
- Determine si P pertenece al plano.
- Encuentre una recta que esté ortogonal a E y que contenga al punto Q.
- Encuentre una recta que esté paralela a E y que contenga al punto Q.

(I) E es el plano que contiene al punto $A(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(II) E es el plano que contiene el punto $A(1, 0, 1)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Considere el plano $E : 2x - y + 3z = 9$ y la recta $L : x = 3t + 1,\ y = -2t + 3,\ z = 5t$.

2 pts. (a) Encuentre $E \cap L$.

3 pts. (b) Encuentre una recta G que no interseque ni al plano E ni a la recta L. Pruebe su afirmación. ¿Cúantas rectas con esta propiedad hay?

2 pts. (c) Encuentre un plano F que pase por los puntos $P(2, -5, 0)$ y $Q(0, 0, 3)$ y no es paralelo a E. ¿Cuántos planos con esta propiedad hay? ¿Se puede decir qué es $E \cap F$?

Ejercicios voluntarios[1]

4. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P, determine:

- si L_1 y L_2 son paralelas,
- si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
- si P pertenece a L_1 y/o a L_2,
- una recta paralela a L_2 que pase por P.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, $\quad P(5, 2, 11)$.

(b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : x = t + 1,\ y = 3t - 4,\ z = -t + 2$, $\quad P(5, 7, 2)$.

5. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

(a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E.

(b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{v}$.

(c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores $c_{\parallel}$ y $c_{\perp}$ tal que $c_{\parallel}$ es paralelo a E, $c_{\perp}$ es ortogonal a E y $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$.