

# Álgebra lineal

## Taller 1

Introducción.

Fecha de entrega: 18 de agosto de 2022

8 pts.

1. Encuentre todas las soluciones de los siguientes sistemas y visualice las ecuaciones y las soluciones en el plano.

(a)  $3x + 5y = 7, \quad -9x - 15y = 10,$

(b)  $2x + 5y = 10, \quad x + 2y + 3 = 0,$

(c)  $2x + y = 4, \quad 3x - 2y = -1, \quad 5x + 3y = 7,$

(d)  $x + 5y = 3, \quad -3x + 2y = 8, \quad 2x + 3y = -1.$

2 pts.

2. (a) Encuentre todos los números  $k$  tal que el siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 5y = 0, \quad 3x + (2 + k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros  $k$ ?

2 pts.

- (b) Haga lo mismo para el sistema

$$kx + 5y = 5, \quad 3x + (2 + k)y = -3.$$

3 pts.

3. En una bodega hay soluciones de un cierto químico con concentraciones de 1% y de 13%. ¿Cuántos mililitros de cada una de las soluciones disponibles se requieren para obtener 500 ml de una solución de este químico con concentración de 5%?

5 pts.

4. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

(a)  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(b)  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(c)  $V$  es el conjunto de todas las funciones continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(d)  $V$  es el conjunto de todas las funciones  $f$  continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(4) = 1$ .

---

---

### Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

---

---

5. Repita el ejercicio 2 pero con el sistema

- $kx + 2y = 0$ ,  $2x - (3 + k)y = 0$  en el literal (a) y
- $kx + 2y = 6$ ,  $2x - (3 + k)y = -3$  en el literal (b).

6. Considere la ecuación

$$3x + 4y = 5. \quad (*)$$

- (a) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de (\*) y la nueva ecuación es  $(3, -1)$ ? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.
- (b) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de (\*) y las nuevas ecuaciones es  $(3, -1)$ ? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.
- (c) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de (\*) y la nueva ecuación es  $(2, -3)$ ? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.
- (d) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de (\*) y las nuevas ecuaciones es  $(2, -3)$ ? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.
- (e) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de (\*) y la nueva ecuación no tenga solución.
- (f) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de (\*) y la nueva ecuación tenga infinitas soluciones.

---

Recuerde que un *espacio vectorial sobre*  $\mathbb{R}$  es un conjunto  $V$  con una *suma*  $u + v \in V$  para  $u, v \in V$  y un *producto*  $\lambda v \in V$  para  $v \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que los siguiente se tiene:

- (I) *asociatividad*:  $(u + v) + w = u + (v + w)$  para todo  $u, v, w \in V$ ,
- (II) *conmutatividad*:  $u + v = v + u$  para todo  $u, v \in V$ ,
- (III) *elemento neutral*: Existe un  $\mathbf{0} \in V$  tal que  $\mathbf{0} + v = v$  para todo  $v \in V$ ,
- (IV) *inverso aditivo*: Para todo  $v \in V$  existe un elemento  $\tilde{v} \in V$  tal que  $v + \tilde{v} = \mathbf{0}$ ,
- (V)  $1v = v$ .
- (VI) *compatibilidad*:  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ ,
- (VII) *distributividad*:  $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v, u \in V$ ,  
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ .

7. Demuestre lo siguiente:

- (a) El elemento neutral es único.
- (b)  $0v = \mathbf{0}$  para todo  $v \in V$ .
- (c)  $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (d) Dado  $v \in V$ , su inverso  $\tilde{v}$  es único.
- (e) Dado  $v \in V$ , su inverso  $\tilde{v}$  cumple  $\tilde{v} = (-1)v$ .

---

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.