Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 12

Bases.

Representación matricial de transformaciones lineales. Fecha de entrega: 05 de mayo de 2022

---

2 pts. **1.** Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escriba los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como combinaciones lineales de de la base $\mathcal{B}$.

3 pts. **2.** Sean $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 7\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las siguentes matrices como combinaciones lineales de los elementos de la base.

$$K = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

2 pts. **3.** (a) Demuestre que la siguente función es lineal:

$$\Phi : M(2\times 2) \to M(2\times 2), \qquad \Phi(A) = A^t$$

2 pts. (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar[1] de $M(2\times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

2 pts. (c) Sean $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es una base de $M(2\times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

3 pts. **4.** Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

(a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

(c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

1 pts. **5.** (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

1 pts. (b) Determine $\ker(T),\ \mathrm{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\mathrm{Im}(T))$.

1 pts. (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de P_3. Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

1 pts. (d) Sean $q_1 = X+1,\ q_2 = X-1,\ q_3 = X^2+X,\ q_4 = X^3+1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3. .

2 pts. (e) Encuentre la matriz que representa a T con respecto a la base $\mathcal{C}$.

Ejercicio voluntario[2]

6. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

   (a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (c) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (d) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

7. Sean B, C, D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11. Represéntelas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

[1] $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.