

Álgebra lineal

1. (a) 1 pts. ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?
- (b) 1 pts. ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?
- (c) 1 pts. ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?
- (d) 2 pts. ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2 ? ¿Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?
2. 5 pts. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero? Justifique su respuesta.
- (a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los v_1, \dots, v_k . Entonces z es combinación lineal de v_1, \dots, v_k, u .
- (b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces v_1, \dots, v_k, u es un sistema de vectores linealmente dependientes.
- (c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los v_2, \dots, v_k .
3. 10 pts. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.
- (a) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,
- (b) $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,
- (c) $C : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$, $C(M) = M + M^t$
- (d) $D : P_3 \rightarrow P_4$, $Dp = p' + xp$,
- (e) $S : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$, $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicios voluntarios¹

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

- (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
 (b) Encuentre matrices que generan V . ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V ?

5. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

- (a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; \mathbb{R}^2 .
 (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $M(2 \times 2)$.
 (c) $p_1 = 1 + x$, $p_2 = x + x^2$, $p_3 = x^2 + x^3$, $p_4 = 1 + x + x^2 + x^3$; P_3 .

6. (a) (i) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in \mathbb{R}^3 .
 (ii) Complete la base encontrado en (i) a una base de \mathbb{R}^3 .
 (b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.
 (i) Demuestre que F es un subespacio de \mathbb{R}^4
 (ii) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.
 (iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .
 (c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.
 (i) Demuestre que G es un subespacio de \mathbb{R}^4
 (ii) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.
 (iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .

7. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectores generan el espacio \mathbb{R}^3 . Si lo hacen, escoja una base de \mathbb{R}^3 de los vectores dados.

- (b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2 . Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

- (c) Sean $p_1 = x^2 + 7$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3 .

8. Determine si $\text{gen}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ para

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V , determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V .

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 3x$, $p_3 = x^2 + 2x - 5$, $p_4 = x^3 + 3x + 2$.

(c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subespacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\text{gen}\{u_1, \dots, u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\text{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \text{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\text{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \text{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}.$$

(d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \rightarrow W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \text{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. ¿Es verdad si A no es invertible?