Álgebra lineal

Taller 9

Subespacios y subespacios afines.

Fecha de entrega: 07 de abril de 2022

5 pts. **1.** Sea F el plano dado por $F: 2x - 5y + 3z = 0$.

(a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \operatorname{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

(b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tal que $\operatorname{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.

(c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

6 pts. **2.** Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(a) Escriba E en la forma $E: ax + by + cz = d$.

(b) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tal que $\operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\} = E$.

(c) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

3 pts. **3.** (a) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \operatorname{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

3 pts. (b) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

3 pts. (c) ¿El siguiente conjunto genera las matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M(2 \times 2)$ que es triangular superior pero que no pertenece a $\operatorname{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

Ejercicios voluntarios[1]

4. Demuestre que

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

5. Demuestre que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = 5 \end{array} \right\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{R}^4$.

6. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

7. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \to V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \qquad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:
Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \to V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \qquad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. (a) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(b) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(c) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?
(d) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(e) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(f) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.