

# Álgebra lineal

Transposición de matrices; determinantes.

Fecha de entrega: 17 de marzo de 2022

- 2 pts. 1. (a) Sea  $A \in M(m \times n)$ . Demuestre que  $AA^t$  y  $A^tA$  son matrices simétricas.
- 3 pts. (b) Calcule  $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$ .
- 6 pts. 2. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 6 pts. 3. Determine todos los  $x \in \mathbb{R}$  tal que las siguientes matrices son invertibles. (Puede usar que una matriz cuadrada es invertible si y solo si determinante es diferente de 0. Este hecho vamos a ver en la siguiente semana.)

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

- 1 pts. 4. Encuentre por lo menos cuatro matrices  $3 \times 3$  cuyo determinante es 18.
- 2 pts. 5. Escoja dos de las siguientes afirmaciones y diga son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.
- (a) Si  $A$  es una matriz simétrica invertible, entonces  $A^{-1}$  es simétrica.
  - (b) Si  $A, B$  son matrices simétricas, entonces  $AB$  es simétrica.
  - (c) Si  $AB$  es una matriz simétrica, entonces  $A, B$  son matrices simétricas.
  - (d) Si  $A, B$  son matrices simétricas, entonces  $A + B$  es simétrica.
  - (e) Si  $A + B$  es una matriz simétrica, entonces  $A, B$  son matrices simétricas.
  - (f) Si  $A$  es una matriz simétrica, entonces  $A^t$  es simétrica.
  - (g)  $AA^t = A^tA$ .

## Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

6. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

7. Sea  $A \in M(m \times n)$ .

(a) Demuestre que  $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$  para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ .

(b) Sea  $B \in M(n \times m)$  y suponga que  $\langle B\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$  para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ . Demuestre que  $B = A^t$ .

(c) Demuestre que  $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$  para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

8. Sea  $A \in M(m, n)$ . Demuestre que  $AA^t$  y  $A^tA$  son matrices simétricas.