Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores.

Fecha de entrega: 03 de marzo de 2022

5 pts. **1.** (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea $\vec{e}_k$ el k-ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule $A\vec{e}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A.

(b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).

(c) Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{v} = \vec{0}$.

(e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

6 pts. **2.** (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{e}_1$ a $\vec{v}$ y el vector $\vec{e}_2$ a $\vec{w}$.

(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a $\vec{e}_1$ y el vector $\vec{w}$ a $\vec{e}_2$.

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

3. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

1 pts. (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.

1 pts. (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.

1 pts. (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.

3 pts. (d) Haga lo mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.

3 pts. (e) Haga los mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

4. Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \quad \Longleftrightarrow \quad R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

5. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

(b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.