

Álgebra lineal

Producto cruz; planos y rectas en \mathbb{R}^3 ,
Proceso de eliminación de Gauß y Gauß-Jordan.

Fecha de entrega: 17 de febrero de 2022

1. En \mathbb{R}^3 considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

1 pts.

(a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a E y encuentre tres puntos que **no** pertenecen a E .

1 pts.

(b) Encuentre un punto en E y dos vectores \vec{v} y \vec{w} paralelos a E y no paralelos entre si.

1 pts.

(c) Encuentre un punto en E y un vector \vec{n} que es ortogonal a E .

2 pts.

(d) Encuentre un punto en E y dos vectores \vec{a} y \vec{b} paralelos a E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

¡Pruebe todas sus respuestas!

4 pts.

2. Para los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, -1)$ y los siguientes planos E :

- Encuentre la ecuación del plano.
- Determine si P pertenece al plano.
- Encuentre una recta que esté ortogonal a E y que contenga al punto Q .
- Encuentre una recta que esté paralela a E y que contenga al punto Q .

(i) E es el plano que contiene al punto $A(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) E es el plano que contiene el punto $A(1, 0, 1)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Considere el plano $E : 2x - y + 3z = 9$ y la recta $L : x = 3t + 1, y = -2t + 3, z = 5t$.

1 pts.

(a) Encuentre $E \cap L$.

1 pts.

(b) Encuentre una recta G que no interseque ni al plano E ni a la recta L . Pruebe su afirmación. ¿Cuántas rectas con esta propiedad hay?

1 pts.

(c) Encuentre un plano F que pase por los puntos $P(2, -5, 0)$ y $Q(0, 0, 3)$ y no es paralelo a E . ¿Cuántos planos con esta propiedad hay? ¿Se puede decir qué es $E \cap F$?

8 pts.

4. Use la eliminación de Gauß o Gauß-Jordan para encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 7, \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ & 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 28, \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 13, \\ & x_1 - 2x_2 = -4, \\ & 4x_1 + 5x_2 = 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -9, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 19. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -13, \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 21, \\ & 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 13. \end{aligned}$$

Ejercicios voluntarios¹

5. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P , determine:

- si L_1 y L_2 son paralelas,
- si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
- si P pertenece a L_1 y/o a L_2 ,
- una recta paralela a L_2 que pase por P .

(a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad P(5, 2, 11).$

(b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : x = t + 1, \quad y = 3t - 4, \quad z = -t + 2, \quad P(5, 7, 2).$

6. En \mathbb{R}^3 considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

- (a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E .
- (b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$.
- (c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores c_{\parallel} y c_{\perp} tal que c_{\parallel} es paralelo a E , c_{\perp} es ortogonal a E y $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.