Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 2

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Fecha de entrega: 10 de febrero de 2022

---

5 pts.

1. Sean $P(2,3)$, $Q(-1,4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule y grafica $\overrightarrow{PQ}$, $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.

   (b) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

   (c) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a $\vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen el doble de la longitud de $\vec{v}$.

   (e) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.
   Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

2 pts.

2. Para los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5 pts.

3. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$.

   (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 pts.

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule $\operatorname{proy}_{\vec{b}}\vec{a}$ y $\operatorname{proy}_{\vec{a}}\vec{b}$.

   (b) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}}\vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

   (c) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}}\vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

1 pts.

5. (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,2,-5)$.

2 pts.

   (b) Calcule el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores
   $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2 pts. (c) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores $\vec{a}$ con norma 7 hay tal que el volumen del parelelepípedo geneardo por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ sea 24? Diga geométricamente cómo se encuentran todos los $\vec{a}$ con esta propiedad y calcule dos de ellos.

Ejercicios voluntarios[1]

6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(I) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(II) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$.

7. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.

(a) Demustre que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| \leq \|\vec{a}\|$.

(b) Encuentre condiciones para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| = \|\vec{a}\|$.

(c) ¿Es cierto que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| \leq \|\vec{b}\|$?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.