Álgebra lineal

Taller 12

Cambio de bases.
Representación matricial de transformaciones lineales. Fecha de entrega: 14 de mayo de 2021

3 pts. **1.** Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

(a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

(c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

Sugerencia para los ejercicios 3 y 4: Sugerencia: Primero encuentra una base de $\mathbb{R}^2$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.

2. En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

2 pts. (b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.

2 pts. (c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.

3. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

2 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

2 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

2 pts. **4.** (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/4} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

1 pts. (b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

1 pts. (c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

5. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio voluntario[1]

6. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

(a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(c) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(d) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

7. Sean B, C y D las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11. Represéntelas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.