

# Álgebra lineal

5 pts.

1. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

(a)  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$ ,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$ ,

(b)  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$ ,  $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$ ,

(c)  $C : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$ ,  $C(M) = M + M^t$

(d)  $D : P_3 \rightarrow P_4$ ,  $Dp = p' + xp$ ,

(e)  $S : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$ ,  $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$ .

3 pts.

2. De la siguiente matriz, encuentre una base del kernel y de la imagen y las dimensiones correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (a) Demuestre que  $E$  y  $F$  son invertibles. Describa como actúan geoméricamente en  $\mathbb{R}^2$ .

2 pts.

- (b) Calcule  $\text{Im}(A)$ ,  $\ker(A)$  y sus dimensiones. Dibuje  $\text{Im}(A)$  y  $\ker(A)$ , diga qué objetos geométricos son.

2 pts.

- (c) Calcule  $\text{Im}(A)$ ,  $\text{Im}(FA)$ ,  $\text{Im}(AE)$  y sus dimensiones. Dibújelos y diga cual es la relación entre ellos.

2 pts.

- (d) Calcule  $\ker(A)$ ,  $\ker(FA)$ ,  $\ker(AE)$  y sus dimensiones. Dibújelos y diga cual es la relación entre ellos.

4. Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $A \in M(m \times n)$ .

2 pts.

- (a) ¿Cuáles son las dimensiones posibles de  $\ker A$  y  $\text{Im } A$ ?

2 pts.

- (b) Para cada  $j = 0, 1, 2, 3$  encuentre una matriz  $A_j \in M(2 \times 3)$  con  $\dim(\ker A_j) = j$ , es decir: encuentre matrices  $A_0, A_1, A_2, A_3$  con  $\dim(\ker A_0) = 0$ ,  $\dim(\ker A_1) = 1$ ,  $\dots$ . Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

---

---

### Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

---

---

5. De las siguientes matrices, encuentre una base del kernel y de la imagen y las dimensiones correspondientes.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Sean  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ . Suponga que  $\vec{w} \neq \vec{0}$  y que  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$  es ortogonal a todos los vectores  $\vec{v}_j$ . Demuestre que  $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ . Se sigue que el sistema  $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  es linealmente independiente?

7. Sea  $A \in M(m \times n)$ . Demuestre:

(I)  $A$  inyectiva  $\implies m \geq n$ .

(II)  $A$  sobreyectiva  $\implies n \geq m$ .

Demuestre que la implicación " $\Leftarrow$ " en (i) and (ii) en general es falsa.

8. Sea  $A \in M(m \times n)$  y suponga que  $A$  es biyectivo. Demuestre que  $m = n$ .

9. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de  $M(2 \times 2)$  a  $P_3$ .  
(b) Existe una función lineal biyectiva  $S : M(2 \times 2) \rightarrow P_k$  para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 2$ ?

---

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.