Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales.

Fecha de entrega: 09 de abril de 2021

---

5 pts.

1. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \;\; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

5 pts.

2. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

(a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

(b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?

(d) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ fijo. ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?

(e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^k$?

5 pts.

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 5 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

(I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.

(II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.

(III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.

(IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $n = n$.

(V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$) .

(VI) Todas las matrices que no son simétricas.

(VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).

(VIII) Todas las matrices diagonales.

(IX) Todas las matrices triangular superior.

(X) Todas las matrices triangular inferior.

(XI) Todas las matrices invertibles.

(XII) Todas las matrices no invertibles.

(XIII) Todas las matrices con $\det A = 1$.

2.5 pts.

4. (a) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

2.5 pts.

(b) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

Ejercicios voluntarios[1]

---

5. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

6. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \to V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \qquad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:
Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \to V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \qquad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. (a) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(b) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(c) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?
(d) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(e) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(f) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.