# Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes. Fecha de entrega: 19 de marzo de 2021

3 pts. 1. Escriba la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

2 pts. 2. (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que $AA^t$ y $A^tA$ son matrices simétricas.

2 pts. (b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

6 pts. 3. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6 pts. 4. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles. (Puede usar que una matriz cuadrada es invertible si y solo si determinante es diferente de 0. Este hecho vamos a ver en la siguiente semana.)

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. 5. Encuentre por lo menos cuatro matrices $3 \times 3$ cuyo determinante es 18.

## Ejercicios voluntarios[1]

6. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2)$. Demuestre que $P_{12}$ se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que $P_{ij}$ se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

**Observación:** El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

7. Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1]Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

8. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}. \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

9. Sea $A \in M(m \times n)$.

   (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

   (b) Sea $B \in M(n\times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

   (c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

10. Falso o verdadero? Pruebe sus respuestas.[2]

   (a) Si $A$ es una matriz simétrica invertible, entonces $A^{-1}$ es símetrica.

   (b) Si $A$, $B$ son matrices simétricas, entonces $AB$ es símetrica.

   (c) Si $AB$ es una matriz simétrica, entonces $A$, $B$ son matrices simétricas.

   (d) Si $A$, $B$ son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

   (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces $A$, $B$ son matrices simétricas.

   (f) Si $A$ es una matriz simétrica, entonces $A^t$ es símetrica.

   (g) $AA^t = A^tA$.

[2] Recuerda que una matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ se llama *simétrica* si $A = A^t$.