Álgebra lineal

Taller 3

Prodcto cruz; planos y rectas en $\mathbb{R}^3$. Fecha de entrega: 19 de febrero de 2021

---

1 pts. **1.** (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,2,-5)$.

2 pts. (b) Calcule el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

2 pts. (c) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores $\vec{a}$ con norma 7 hay tal que el volumen del parelelepípedo geneardo por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ sea 24? Diga geométricamente cómo se encuentran todos los $\vec{a}$ con esta propiedad y calcule dos diferentes.

2. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

1 pts. (a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a E y encuentre tres puntos que **no** pertenecen a E.

1 pts. (b) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en E que no son paralelos entre si.

1 pts. (c) Encuentre un punto en E y un vector $\vec{n}$ que es ortogonal a E.

2 pts. (d) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

¡Pruebe todas sus respuestas!

5 pts. **3.** Para los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,-1)$ y los siguientes planos E:

- Encuentre la ecuación del plano.
- Determine si P pertenece al plano.
- Encuentre una recta que esté ortogonal a E y que contenga al punto Q.
- Encuentre una recta que esté paralela a E y que contenga al punto Q.

(I) E es el plano que contiene al punto $A(1,0,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ y $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(II) E es el plano que contiene el punto $A(1,0,1)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

4. Considere el plano $E : 2x - y + 3z = 9$ y la recta $L : x = 3t + 1,\ y = -2t + 3,\ z = 5t$.

1 pts. (a) Encuentre $E \cap L$.

2 pts. (b) Encuentre una recta G que no interseque ni al plano E ni a la recta L. Pruebe su afirmación. ¿Cúantas rectas con esta propiedad hay?

2 pts. (c) Encuentre un plano F que pase por los puntos $P(2,-5,0)$ y $Q(0,0,3)$ y no es paralelo a E. ¿Cuántos planos con esta propiedad hay? ¿Se puede decir qué es $E \cap F$?

Ejercicios voluntarios[1]

5. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P, determine:

- si L_1 y L_2 son paralelas,
- si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
- si P pertenece a L_1 y/o a L_2,
- una recta paralela a L_2 que pase por P.

(a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, $\quad P(5, 2, 11)$.

(b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : x = t+1,\ y = 3t-4,\ z = -t+2$, $\quad P(5, 7, 2)$.

6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(I) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(II) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$.

7. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.

(a) Demustre que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| \leq \|\vec{a}\|$.

(b) Encuentre condiciones para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| = \|\vec{a}\|$.

(c) ¿Es cierto que $\| \operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \| \leq \|\vec{b}\|$?

8. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

(a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E.

(b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$.

(c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores $c_\parallel$ y $c_\perp$ tal que $c_\parallel$ es paralelo a E, $c_\perp$ es ortogonal a E y $c = c_\parallel + c_\perp$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.