

Álgebra lineal

Taller 2

Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Fecha de entrega: 12 de febrero de 2021 antes de las 8 am

5 pts.

1. Sean $P(2, 3)$, $Q(-1, 4)$ puntos en \mathbb{R}^2 y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en \mathbb{R}^2 .

- Calcule y grafica \overrightarrow{PQ} , $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.
- Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que \vec{v} y que tienen el doble de la longitud de \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores que son ortogonales a \vec{v} .
Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a \vec{v} .

2 pts.

2. Para los siguientes vectores \vec{u} y \vec{v} decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

$$(a) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5 pts.

3. (a) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son paralelos:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son perpendiculares:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3 pts.

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{a}$ y $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.
- Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.
- Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

5 pts.

5. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

$$(a) \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$$

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

Ejercicio voluntario¹

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* \mathbb{R} es un conjunto V con una *suma* $u + v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

- (I) *asociatividad*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$,
- (II) *conmutatividad*: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$,
- (III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbb{O} \in V$ tal que $\mathbb{O} + v = v$ para todo $v \in V$,
- (IV) *inverso aditivo*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\tilde{v} \in V$ tal que $v + \tilde{v} = \mathbb{O}$,
- (V) $1v = v$.
- (VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,
- (VII) *distributividad*: $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

6. Demuestre lo siguiente:

- (a) El elemento neutral es único.
- (b) $0v = \mathbb{O}$ para todo $v \in V$.
- (c) $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (d) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} es único.
- (e) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} cumple $\tilde{v} = (-1)v$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.