Álgebra lineal

Taller 16

Diagonalización de matrices; secciones cónicas.

11 de diciembre de 2020

---

4 pts.

1. Para cada una de las siguientes matrices, determine si son diagonalizables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre una substitución ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas. Haga un bosquejo de las soluciones. Si es un elipse, calcule las longitudes de los ejes principales y el ángulo que tienen con el eje x. Si es una hipérbola, calcule el ángulo que tienen las asíntotas con el eje x.

4 pts. (a) $10x^2 - 6xy + 2y^2 = 4$,

3 pts. (b) $x^2 - 9y^2 = 2$,

1 pts. (c) $x^2 - 9y^2 = 20$ (compare la solución con la del literal anterior!)

4 pts. (d) $11x^2 - 16xy - y^2 = 30$.

4 pts. (e) $x^2 + 4xy + 4^2 = 4$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

3. [Fraleigh, Linear Algebra, Exercise 8.1] Encuentre una substitución ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones de $F(x_1, x_2) = 1$ y $F(x_1, x_2) = 0$.

(a) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$,

(b) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2$,

(c) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$,

(d) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

Ecuaciones diferenciales

Sea $C(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para $n \in \mathbb{N}$ defina $C^n(\mathbb{R})$ como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son n veces diferencialbles y cuya derivada n-ésima es continua. Es relativamente claro que $C(\mathbb{R})$ y $C^n(\mathbb{R})$ son espacios vectoriales.
En lo que sigue denotamos la derivada k-ésima de f por $f^{(k)}$.

Ejercicio 1. Sean $P_0, P_1, \dots, P_n, Q$ funciones continuas y defina

$$T : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad Tf = P_n f^{(n)} + P_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + P_2 f'' + P_1 f' + P_0 f. \tag{1}$$

(i) Demuestre que T es una transformación lineal.

(ii) Demuestre que el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial

$$P_n f^{(n)} + P_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + P_2 f'' + P_1 f' + P_0 f = 0$$

es un subespacio de $C^{(n)}$. (De hecho, es el kernel de T y se puede mostrar que la dimensión es a lo más n.)

(iii) Demuestre que el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial

$$P_n f^{(n)} + P_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + P_2 f'' + P_1 f' + P_0 f = Q$$

es un subespacio afín de $C^{(n)}$.

Ahora miramos el caso especial cuando las funciones $P_n, \dots, P_1, P_0$ son constantes y asumimos que $P_n \neq 0$. Luego sin restricción podemos asumir que $P_n = 1$, y escribimos a_j en vez de P_j para indicar que son números constantes, es decir ahora tenemos

$$T : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad Tf = f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f \tag{2}$$

y la ecuación diferencial homogénea asosiada es

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = 0. \tag{3}$$

Es una ecuación diferencial lineal de orden n y de Cálculo integral saben que para solucionarla, se calculan los ceros del polinomio característico asociado $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.
En el siguiente ejercicio vamos a reescribir (3) como una ecuación de primer orden.

Ejercicio 2. Defina el vector $F = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-2} \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$ (es un vector de n componentes donde cada entrada es una función). Demuestre que f satsiface (3) si y solo si F satisface la ecuación de primer orden

$$F' = AF \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demuestre que el polinomio característico de la ecuacion diferencial (3) es igual al polinomio característico y de la matriz A.

Uno se puede convencer de que la solución general de $F' = AF$ es $F(x) = \mathrm{e}^{xA} F_0$ donde F_0 es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$ y e^{xA} se define como la serie

$$\mathrm{e}^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n.$$

El sigiente ejercicio demuestar cómo se puede calcular e^{xA} si A es diagonalizable. Si no lo es, se puede hacer algo parecido, pero necesitaríamos la llamada forma normal de Jordan.

Ejercicio 3. (I) Suponga que D es una matriz diagonal de la forma $D = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$. Demuestre que $\mathrm{e}^D = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{c_1}, \dots, \mathrm{e}^{c_n})$, es decir,

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & c_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{c_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{c_2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mathrm{e}^{c_{n-1}} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathrm{e}^{c_n} \end{pmatrix}$$

(II) Sea A diagonalizable y sean D una matriz diagonal y S una matriz invertible tal que $A = SDS^{-1}$. Demuestre que $A^n = SD^nS^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(III) Concluya que $\mathrm{e}^{xA} = S\mathrm{e}^{xD}S^{-1}$.

Veamos cómo se puede solucionar la ecuación inhomogénea

$$F' = AF + G \tag{4}$$

donde G es un vector con n entradas y cada entrada es una función. La idea es la misma que la "variación de constante" (también llamado "factor integrante") en dimensión 1. Primero conseguimos una solución matricial Φ de $\Phi' = A\Phi$. Ya sabemos que $\Phi(x) = \mathrm{e}^{xA}$ sirve (si le gusta más el método del factor integrante: Φ^{-1} es el factor intergrante de la ecuación). Si la ecuación fuera homogénea (es decir, si $G = 0$), entonces la solucón general de (4) sería ΦF_0 con un vector constante F_0 arbitario. Si suponemos que $G \neq 0$, podemos intentar el siguiente *ansatz* para las soluciones F de (4):

$$F = \Phi C$$

donde C no es constante sino una función (con en entradas). Si lo reemplazamos en (4), obtenemos

$$G = F' - AF = (\Phi C)' - A\Phi C = \Phi' C + \Phi C' - A\Phi C = A\Phi C + \Phi C' - A\Phi C = \Phi C'$$

Aquí usamos que $\Phi' = A\Phi$. Así obtenmos $C' = \Phi^{-1}G$ y luego

$$C = \int \Phi^{-1} G \,\mathrm{d}\, x.$$

Finalmente obtenemos la solución de (4) como

$$F(x) = \Phi(x) \int \Phi^{-1} G \,\mathrm{d}\, x \qquad \text{no olvidar la constante de integración!}$$

Ejemplo 1. Una masa m está atada a un resorte con constante de Hook k. Sea $x(t)$ la posición de la masa m al tiempo t. Si no hay otras fuerzas externas, entonces tenemos que

$$mx'' = -kx, \quad \text{en otras palabras,} \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5}$$

(Es claro que la ecuación diferencial por si sola no describe todo el movimiento ya que faltan los datos iniciales). Definimos el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$. Entonces obtenemos

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = AX \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}$ y por consiguiente los valores propios de A son $\lambda_\pm = \pm \mathrm{i}\sqrt{k/m}$. Para abreviar esto, definimos $\omega := \sqrt{k/m}$. Los vectores propios correspondientes son

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\omega \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}.$$

Se definimos $S = (\vec{v}_+ | \vec{v}_2)$, entonces obtenmos que $A = SDS^{-1}$ donde D es la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(\mathrm{i}\omega,\ -\mathrm{i}\omega)$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}^{-1} \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{i}\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & -\mathrm{i}\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega & -1 \\ -\mathrm{i}\omega & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ k/m \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] & -\mathrm{i}\omega \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Luego la solución general de $X' = AX$ es

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\omega t) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\alpha\omega\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

con números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarias. La solución de nuestra ecuación inicial (5) es simplmente la primera componente del vector X:

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega t)$$

Note que la segunda componente de X es la derivada de la primera, tal como debe ser.

Remark 1. En este caso no es necesario diagonalizar la matriz A para calcular e^{tA} si notamos que $A^2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega \operatorname{id}$ y por consiguiente $A^{2n} = (A^2)^n = (-1)^n\omega^{2n} \operatorname{id}$ y $A^{2n+1} = A^{2n}A = (-1)^n\omega^{2n}A$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}A^{2n} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}A^{2n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\omega^{2n} \operatorname{id} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\omega^{2n}A \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} \operatorname{id} + \frac{1}{\omega}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}A = \cos(\omega t) \operatorname{id} + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que nuestra ecuación inicial no es homogénea sino que hay una fuerza g exterior que actua sobre la masa. Entonces el sistema sería

$$x'' + \omega^2 x = g.$$

Esto significaría para nuestro vector X que

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\omega^2 x + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = AX + G \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } G = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Si denotamos la solución matricial de la ecuación homogéna por $\Phi(t)$ (es decir, $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ como calculado en (6)) We obtain for the general solution of X

$$\begin{aligned} X(t) = \Phi(t) \int [\Phi(t)]^{-1} G(t) \mathrm{d}\, t &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\omega^{-1} \sin(\omega t) \\ \omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -\omega^{-1} \sin(\omega t) g(t) \\ \cos(\omega t) g(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t. \end{aligned}$$

Recuerde que las soluciones x que buscamos, corresponden a la primera componente de X. Entonces obtenemos para x

$$x(t) = -\omega^{-1} \left[\cos(\omega t) \int \sin(\omega t) g(t) \mathrm{d}\, t + \sin(\omega t) \int \cos(\omega t) g(t) \mathrm{d}\, t \right].$$

(No olvide las constantes de integración!)

To be continued with general second order linear differential equation and Wronskian ...