Álgebra lineal

Taller 14

Producto interno; bases ortogonales.

Fecha de entrega: 27 de noviembre de 2020

1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de U.

2 pts. (b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

2. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

2 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de U.

2 pts. (c) Encuentre una base de $U^{\perp}$.

3. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

1 pts. (a) Sea $P(0, 2, 5)$. Ecuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q.

1 pts. (b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máximal de P?

1 pts. (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

4. Sea $W = \operatorname{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t,\ (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

1 pts. (a) Encuentre una base ortogonal de W.

1 pts. (b) Sean $A_1(1, 2, 0, 1)$, $A_2(11, 4, 4, -3)$, $A_3(0, -1, -1, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.

2 pts. (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

1 pts. **5.** Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}\,, Q\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}\,, \vec{y}\rangle.$$

Concluya que

1 pts. (a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

1 pts. (b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\sphericalangle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientesy encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

7. Encuentre una base ortonormal de $U^\perp$ donde $U = \operatorname{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

8. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

(a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

(b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.

(c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.

(d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to V$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

(I) $\langle x + \lambda y\,, z \rangle = \langle x\,, z \rangle + \lambda \langle y\,, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(II) $\langle x\,, z \rangle = \overline{\langle x\,, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(III) $\langle x\,, x \rangle \geq 0$,

(IV) $\langle x\,, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe que

- (i) y (iii) implican $\langle x\,, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x\,, y \rangle + \langle x\,, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x\,, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x *es ortogonal a* y si y solo si $\langle x\,, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercio 2.

Definición. Sea $A \in m(n \times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos. $\begin{pmatrix} 3 + \imath & 5 - 4\imath \\ 8 & 9\imath \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 - \imath & 8 \\ 5 + 4\imath & -9\imath \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 + 2\imath & 3 + 4\imath \\ 5 + 6\imath & 7 + 8\imath \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 - 2\imath & 5 - 6\imath \\ 3 - 4\imath & 7 - 8\imath \end{pmatrix}$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

Ejercicios.

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \vec{x}\,, \vec{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad \text{para } \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t,\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

   (b) Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax\,, y\rangle = \langle x\,, A^*y\rangle \qquad \text{para todo } \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea V el espacio de todas la funciones continuas $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V:

$$\langle f\,, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } f, g \in V. \tag{1}$$

   (b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1,\ v_n(x) = \sin(n\pi x),\ w_n(x) = \cos(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

   es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el product interno definido en (1).

   (c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1,\ p_1 = x,\ p_2 = x^2,\ p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \ldots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en (1).

   Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *poliniomo j-ésimo de Legendre.*

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \to V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

   (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).

   (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \to G$ tal que:

(i) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.
(ii) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\widetilde{g} \in G$ tal que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g = e$.
(iii) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

(i) $\mathbb{Z}$ con la suma;
(ii) $\mathbb{Q}$ con la suma;
(iii) $\mathbb{R}$ con la suma;
(iv) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;
(v) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;
(vi) funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la suma;
(vii) $M(n \times n)$ con la suma;
(viii) cada espacio vectorial con su suma;
(ix) funciones biyectivas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición;
(x) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;
(xi) funciones lineales biyectivas $V \to V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)-(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.

Ejercicios.

1. Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.

2. Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.

(a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:
  (i) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.
  (ii) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.
  (iii) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\widetilde{Q}$ tal que $\widetilde{Q}Q = Q\widetilde{Q} = E$.

(b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?

(c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.

3. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.

(c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

4. Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ o $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ para un $\varphi \in \mathbb{R}$.