

Álgebra lineal

5 pts.

1. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

(a) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(c) $C : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$, $C(M) = M + M^t$

(d) $D : P_3 \rightarrow P_4$, $Dp = p' + xp$,

(e) $S : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$, $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.

3 pts.

2. De la siguiente matriz, encuentre una base del kernel y de la imagen y las dimensiones correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa como actúan geoméricamente en \mathbb{R}^2 .

2 pts.

- (b) Calcule $\text{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuje $\text{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geoméricos son.

2 pts.

- (c) Calcule $\text{Im}(A)$, $\text{Im}(FA)$, $\text{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújelos y diga cual es la relación entre ellos.

2 pts.

- (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújelos y diga cual es la relación entre ellos.

4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.

2 pts.

- (a) ¿Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\text{Im } A$?

2 pts.

- (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0$, $\dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

Ejercicios voluntarios¹

5. De las siguientes matrices, encuentre una base del kernel y de la imagen y las dimensiones correspondientes.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores \vec{v}_j . Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

7. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(I) A inyectiva $\implies m \geq n$.

(II) A sobreyectiva $\implies n \geq m$.

Demuestre que la implicación " \Leftarrow " en (i) and (ii) en general es falsa.

8. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

9. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3 .
(b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \rightarrow P_k$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 2$?

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.