Álgebra lineal

Taller 10

Bases y dimensión.

Fecha de entrega: 30 de octubre de 2020

---

3 pts. **1.**

(a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

(b) ¿Es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(c) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$?

4 pts. **2.**

(a) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?

(b) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?

(c) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2? Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?

3 pts. **3.** Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.

(a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

(b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.

(c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

4 pts. **4.**

(a) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M(2 \times 2) \setminus \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

(b) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) ¿El siguiente conjunto genera los matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 pts. **5.** Para los siguientes conjuntos, convenzcase que son espacios vectoriales. Encuentre sus dimensiones.

(a) $M_1 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ es triangular superior}\}$.

(b) $M_2 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ tiene zeros en la diagonal}\}$.

(c) $M_3 = \{A \in M(n \times n) : A^t = -A\}$.

(d) $M_4 = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$.

3 pts. **6.** Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero?

(a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces z es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k, u$.

(b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces $v_1, \dots, v_k, u$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los $v_2, \dots, v_k$.

Ejercicios voluntarios[1]

7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.

(a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

8. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

(a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{R}^2$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(2 \times 2)$.

(c) $p_1 = 1 + x, \ p_2 = x + x^2, \ p_3 = x^2 + x^3, \ p_4 = 1 + x + x^2 + x^3; \quad P_3$.

9. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(a) Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.

(b) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\} = E$.

(c) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

10. (a) (I) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(II) Complete la base encontrado en (i) a una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que F es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que G es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

11. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectoren generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

(b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2. Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

(c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3.

12. Determine si $\operatorname{gen}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ para

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V, determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 3x$, $p_3 = x^2 + 2x - 5$, $p_4 = x^3 + 3x + 2$.

(c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{u_1, \dots u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \operatorname{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}.$$

(d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \to W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \operatorname{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \operatorname{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. ¿Es verdad si A no es invertible?