

Álgebra lineal

5 pts.

1. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

5 pts.

2. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

- Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^m .
- Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de \mathbb{R}^n ?
- ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^k ?
- ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de \mathbb{R}^k ?

5 pts.

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 5 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

- Todas matrices con $a_{11} = 0$.
- Todas matrices con $a_{11} = 3$.
- Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
- Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $n = n$.

- Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$).
- Todas las matrices que no son simétricas.
- Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).
- Todas las matrices diagonales.
- Todas las matrices triangular superior.
- Todas las matrices triangular inferior.
- Todas las matrices invertibles.
- Todas las matrices no invertibles.
- Todas las matrices con $\det A = 1$.

2.5 pts.

4. (a) Considere el conjunto \mathbb{R}^2 con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es \mathbb{R}^2 con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

2.5 pts.

- (b) Considere el conjunto \mathbb{R}^2 con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es \mathbb{R}^2 con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

Ejercicios voluntarios¹

5. Sea U un subespacio de \mathbb{R}^n . Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de \mathbb{R}^n .

6. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \rightarrow V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \quad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que (V, \oplus, \odot) es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

- (b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:

Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. (a) ¿Es \mathbb{C}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?
(b) ¿Es \mathbb{C}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} ?
(c) ¿Es \mathbb{R}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{C} ?
(d) ¿Es \mathbb{R}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} ?
(e) ¿Es \mathbb{Q}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?
(f) ¿Es \mathbb{Q}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{C} ?

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.