Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes. Fecha de entrega: 02 de octubre de 2020

3 pts. **1.** Escriba la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

2 pts. **2.** (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

2 pts. (b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

6 pts. **3.** De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa y el determinante de la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6 pts. **4.** Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. **5.** Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

Ejercicios voluntarios[1]

---

6. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

7. Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} :1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

8. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}. \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

9. Sea $A \in M(m \times n)$.

(a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sea $B \in M(n\times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

(c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

10. Falso o verdadero? Pruebe sus respuestas.[2]

(a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.

(b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.

(c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

(e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.

(g) $AA^t = A^tA$.

[2] Recuerda que una matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ se llama *simétrica* si $A = A^t$.