Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 2

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.   Fecha de entrega: 28 de agosto de 2020 antes de las 10 am

---

5 pts.

1. Sean $P(2,3)$, $Q(-1,4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule y grafica $\overrightarrow{PQ}$, $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.

(b) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

(c) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a $\vec{v}$.

(d) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen el doble de la longitud de $\vec{v}$.

(e) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.
Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

2 pts.

2. Para los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$,   (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5 pts.

3. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$,   (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$,   (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$.

(b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$,   (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 pts.

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule $\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.

(b) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describe este conjunto geométricamente.

(c) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describe este conjunto geométricamente.

5 pts.

5. De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 0$.

(e) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

Ejercicio voluntario[1]

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto V con una *suma* $u+v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

(I) *asociatividad*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$,

(II) *conmutatividad*: $u + v = v + v$ para todo $u, v \in V$,

(III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbb{O} \in V$ tal que $\mathbb{O} + v = v$ para todo $v \in V$,

(IV) *elemento inverso*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\widetilde{v} \in V$ tal que $v + \widetilde{v} = \mathbb{O}$,

(V) $1v = v$.

(VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,

(VII) *distributividad*: $\lambda(v + u) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

6. Demuestre lo siguiente:

(a) El elemento neutral es único.

(b) $0v = \mathbb{O}$ para todo $v \in V$.

(c) $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ es único.

(e) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ cumple $\widetilde{v} = (-1)v$.

---

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.