Álgebra lineal

Taller 14

Proceso de Gram-Schmidt; matrices ortogonales.
Método de mínimos cuadrados.

Fecha de entrega: 15 de mayo de 2020

1. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(a) Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(b) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Encuentre una base de $U^\perp$.

3. (a) Sea $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(I) Sea $\vec{v} = (0, 2, 5)^t$. Ecuentre el punto $\vec{x} \in U$ que esté más cercano a $\vec{v}$ y calcule la distancia entre $\vec{v}$ y $\vec{x}$.

(II) ¿Hay un punto $\vec{y} \in U$ que esté a una distancia máximal de $\vec{v}$?

(III) $*$ Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

(b) Sea $W = \operatorname{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t,\ (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(I) Encuentre una base ortogonal de W.

(II) Sean $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^t$, $\vec{a}_2 = (11, 4, 4, -3)^t$, $\vec{a}_3 = (0, -1, -1, 0)^t$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $\vec{w}_j \in W$ que esté más cercano a $\vec{a}_j$ y calcule la distancia entre $\vec{a}_j$ y $\vec{w}_j$.

(III) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

4. Encuentre una base ortonormal de $U^\perp$ donde $U = \operatorname{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

5. (a) Una bola rueda a lo largo del eje x con velocidad constante. A lo largo de la trayectoria de la bola se miden las coordenadas x de la bola en ciertos tiempos t. Las siguientes mediciones son (t en segundos, x en metros):

x	1.5	2.0	3.0	4.0	4.5	6
t	1.4	2.3	4.7	6.6	7.4	10.8

- Dibuje los puntos en el plano tx.
- tse el método de mínimos cuadrados para econtrar la posición inicial x_0 y la velocidad v de la bola.

- Dibuje la recta en el bosquejo anterior. ¿Dónde/Cómo se ven x_0 y v?

  Hint. Recuerde que $x(t) = x_0 + vt$ para un movimiento con velocidad constante.

(b) Se supone que una sustancia química inestable decaye según la ley $P(t) = P_0 e^{kt}$. Suponga que se hicieron las siguientes mediciones:

t	1	2	3	4	5
P	7.4	6.5	5.7	5.2	4.9

Con el método de mínimos cuadrados aplicado a $\ln(P(t))$, encuentre P_0 y k que mejor corresponden con las mediciones. Dé una estimada para $P(8)$.

(c) Con el método de mínimos cuadrados encuentre el polínomio $y = p(x)$ de grado 2 que mejor aproxima los siguientes datos:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	15	8	2.8	-1.2	-4.9	-7.9	-8.7

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

(a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).

(b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

7. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.

(c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

8. Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.

(a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:

(I) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.

(II) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.

(III) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\widetilde{Q}$ tal que $\widetilde{Q}Q = Q\widetilde{Q} = E$.

(b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?

(c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to V$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\langle x + \lambda y \,, z\rangle = \langle x \,, z\rangle + \lambda\langle y \,, z\rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(ii) $\langle x \,, z\rangle = \overline{\langle x \,, z\rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(iii) $\langle x \,, x\rangle \geq 0$,

(iv) $\langle x \,, x\rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe:

- (i) y (iii) implican $\langle x \,, \lambda y + z\rangle = \overline{\lambda}\langle x \,, y\rangle + \langle x \,, z\rangle$,
- (ii) implica que $\langle x \,, x\rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot \,, \cdot\rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x *es ortogonal a* y si y solo si $\langle x \,, y\rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio **??**.

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \to V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \to G$ tal que:

(i) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

(ii) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\widetilde{g} \in G$ tal que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g = e$.

(iii) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

(i) $\mathbb{Z}$ con la suma;

(ii) $\mathbb{Q}$ con la suma;

(iii) $\mathbb{R}$ con la suma;

(iv) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;

(v) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;

(vi) funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la suma;

(vii) $M(n \times n)$ con la suma;

(viii) cada espacio vectorial con su suma;

(ix) funciones biyectivas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición;

(x) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;

(xi) funciones lineales biyectivas $V \to V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)-(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.