Álgebra lineal

Taller 13

Producto interno; bases ortogonales. Fecha de entrega: 08 de mayo de 2020

1. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/4} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

   (b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

   (c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

2. Encuentre una base para el complemento ortogonal de los siguientes espacios vectoriales. Encuentre la dimensión del espacio y la dimensión de su complemento ortogonal.

   (a) $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

   (b) $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

3. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.

   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.

   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

4. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \vec{x}\,, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t,\ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

   (b) Sea V el espacio de todas la funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V:

$$\langle f\,, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } f, g \in V. \tag{1}$$

   (c) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1,\ v_n(x) = \sin(n\pi x),\ w_n(x) = \cos(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

   es un sistema ortogonal en $C[0,1]$ con el product interno definido en (1).

(d) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1,\ p_1 = x,\ p_2 = x^2,\ p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en (1).

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *poliniomo j-ésimo de Legendre.*

5. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax\,, y\rangle = \langle x\,, A^* y\rangle \qquad \text{para todo } \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to V$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

(I) $\langle x + \lambda y\,, z\rangle = \langle x\,, z\rangle + \lambda\langle y\,, z\rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(II) $\langle x\,, z\rangle = \overline{\langle x\,, z\rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(III) $\langle x\,, x\rangle \geq 0$,

(IV) $\langle x\,, x\rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe:

- (i) y (iii) implican $\langle x\,, \lambda y + z\rangle = \overline{\lambda}\langle x\,, y\rangle + \langle x\,, z\rangle$,
- (ii) implica que $\langle x\,, x\rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x *es ortogonal a y* si y solo si $\langle x\,, y\rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercio 13.4.

Definición. Sea $A \in M(n \times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos. $\begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 5-4\mathrm{i} \\ 8 & 9\mathrm{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 8 \\ 5+4\mathrm{i} & -9\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 3+4\mathrm{i} \\ 5+6\mathrm{i} & 7+8\mathrm{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 5-6\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 7-8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$