Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 12

Cambio de bases. Fecha de entrega: 01 de mayo de 2020

1. (a) Demuestre que la siguente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \qquad \Phi(A) = A^t$$

   (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar[1] de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

   (c) Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

2. (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

   (b) Determine $\ker(T),\ \operatorname{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\operatorname{Im}(T))$.

   (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de P_3. Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

   (d) Sean $q_1 = X+1,\ q_2 = X-1,\ q_3 = X^2+X,\ q_4 = X^3+1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3. .

   (e) Encuentre la matriz con respecto a la base $\mathcal{C}$ que representa a T.

[1] $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.