Álgebra lineal

Taller 11

Cambio de bases. Fecha de entrega: 24 de abril de 2020

1. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escriba los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ en términos de la base $\mathcal{B}$.

2. Sean $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 7\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las matrices

$$K = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

en términos de la base $\mathcal{B}$.

3. Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

   (a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

   (c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

4. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

   (a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (c) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

   (d) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.