Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 10

Kernels, imágines de funciones lineales. Fecha de entrega: 17 de abril de 2020

1. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to M(2x2),\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & x-z \\ x+y-3z & z \end{pmatrix},$

   (b) $B : \mathbb{R}^3 \to M(2x2),\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x-z \\ x+y-3z & z \end{pmatrix},$

   (c) $C : M(2\times 2) \to M(2\times 2), \quad C(M) = M + M^t$

   (d) $D : P_3 \to P_4, \quad Dp = p' + xp,$

   (e) $T : P_3 \to M(2\times 3), \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+d \\ 0 & a+d & 0 \end{pmatrix},$

   (f) $T : P_3 \to M(2\times 3), \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+d \\ 0 & a+d & 3 \end{pmatrix}.$

2. Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \mathrm{gen}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

3. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa como actuan geométricamente en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calcule $\mathrm{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuja $\mathrm{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricas son.

   (c) Calcule $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(FA)$, $\mathrm{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cual es la relación entre ellos.

   (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cual es la relación entre ellos.

4. De los siguientes matrices, calcule kernel, imagen y las dimensiones correspondientes.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

   (I) A inyectiva $\Longrightarrow m \geq n$.

   (II) A sobreyectiva $\Longrightarrow n \geq m$.

   Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

6. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

7. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.

   (a) Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\operatorname{Im} A$?

   (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0,\ \dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

8. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.

   (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 2$?