Álgebra lineal

Taller 9

Bases y dimensión. Fecha de entrega: 30 de abril de 2020

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.
   (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

2. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de v_1 y v_2.
   (b) ¿Es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?
   (c) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de
   $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$?

3. (a) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?
   (b) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?
   (c) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2? Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?
   (d) ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?

4. (a) Es F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$. Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.
   (b) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{v_1, v_2\}$. Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.
   (c) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de v_1 y v_2, tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, w\} = E$.
   (d) Encuentre un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$.

5. (a) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

(b) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) ¿El siguiente conjunto genera los matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero?

(a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces que z es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k, u$.

(b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces $v_1, \dots, v_k, u$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los $v_2, \dots, v_k$.

7. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Demuestre que X con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

De los siguientes subconjuntos de X, diga si son subespacios de X.

(I) Todas las funciones acotadas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
(II) Todas las funciones constantes.
(III) Todas las funciones continuas.
(IV) Todas las funciones continuas con $f(3) = 0$.
(V) Todas las funciones continuas con $f(3) = 4$.
(VI) Todas las funciones con $f(3) > 0$.
(VII) Todas las funciones pares.
(VIII) Todas las funciones impares.
(IX) Todos los polinomios.
(X) Todas las funciones nonegativas.
(XI) Todos los polinomios de grado ≥ 4.

8. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{R}^2.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $M(2 \times 2)$.

(c) $p_1 = 1 + x,\ p_2 = x + x^2,\ p_3 = x^2 + x^3,\ p_4 = 1 + x + x^2 + x^3$; P_3.

9. (a) (I) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

(II) Complete la base encontrado en (i) a una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que F es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que G es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

10. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectoren generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

(b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2. Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

(c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3.

11. Determine si $\operatorname{gen}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ para

$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

12. Para los siguientes conjuntos, determine si son espacios vectoriales. Si lo son, calcule su dimensión.

(a) $M_1 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ es triangular superior}\}$.

(b) $M_2 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ tiene zeros en la diagonal}\}$.

(c) $M_3 = \{A \in M(n \times n) : A^t = -A\}$.

(d) $M_4 = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$.

13. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V, determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 3x$, $p_3 = x^2 + 2x - 5$, $p_4 = x^3 + 3x + 2$.

(c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\text{gen}\{u_1, \dots u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\text{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \text{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \text{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}$.

(d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \to W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \text{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. Es verdad si A no es invertible?