Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales.

Fecha de entrega: 27 de marzo de 2020

---

1. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.
   (a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
   (b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   (c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?
   (d) ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?
   (e) ¿Los conjuntos
   $$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$
   son subespacios de $\mathbb{R}^k$?

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $M(m \times n, \mathbb{R})$ con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

   De los siguientes subconjuntos de $M(m \times n)$, diga si son subespacios.

   (I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
   (II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
   (III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
   (IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

   Para los siguientes numerales supongamos que $n = n$.

   (V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$) .
   (VI) Todas las matrices que no son simétricas.
   (VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).
   (VIII) Todas las matrices diagonales.
   (IX) Todas las matrices triangular superior.
   (X) Todas las matrices triangular inferior.
   (XI) Todas las matrices invertibles.
   (XII) Todas las matrices no invertibles.
   (XIII) Todas las matrices con $\det A = 1$.

4. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \to V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ por
   $$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \qquad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$
   para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:
Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \to V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \qquad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.