Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 6

Matrices elementales; determinantes. Fecha de entrega: 06 de marzo de 2020

---

1. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

   (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

   (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuantos chocolates y cuantas mentas contienen:
   (i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,
   (ii) 4 cajas de tipo A y 2 de tipo B,
   (iii) 2 caja de tipo A y 6 de tipo B,
   (iv) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

   (c) Determine si es posible conseguir
   (i) 5 chocolates y 15 mentas,
   (ii) 2 chocolates y 11 mentas,
   (iii) 21 chocolates y 23 mentas,
   (iv) 14 chocolates y 19 mentas.
   comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

3. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

   (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.

   (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.

   (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.

   (d) Haga lo mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.

   (e) Haga los mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots \cdot E_n A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Escribe la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

6. Falso o verdadero? Pruebe sus respuestas.[1]

   (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.

   (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.

   (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

   (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

   (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

   (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.

   (g) $AA^t = A^t A$.

7. (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

   (b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

8. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

   (b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

   Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

[1] Recuerda que una matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ se llama *simétrica* si $A = A^t$.