

Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores.

Fecha de entrega: 28 de febrero de 2020

1. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(vector):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.
- Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \parallel \vec{x}$. Para cada tal \vec{x} , encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

- Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.
 - Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

5. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(matriz):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea e_k el k -ésimo vector unitario en \mathbb{R}^n (es decir, el vector en \mathbb{R}^n cuya k -ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule Ae_k para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A .
 - Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).
 - Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.
 - Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{x} = \vec{0}$.
 - Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

7. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector e_1 a \vec{v} y el vector e_2 a \vec{w} .

(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector \vec{v} a e_1 y el vector \vec{w} a e_2 .

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

8. (a) Sean $A \in M(m, n)$, $B, C \in M(n, k)$, $D \in M(k, l)$.

(i) Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

(ii) Demuestre que $A(BD) = (AB)D$.

(b) Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$