Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$.

Fecha de entrega: 31 de enero de 2020

---

1. Sean $P(2,3)$, $Q(-1,4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\overrightarrow{PQ}$.

   (b) Calcule $\overline{PQ}$.

   (c) Calcule $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.

2. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

   (b) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que tienen la misma dirección que $\vec{v}$.

   (c) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen doble longitud de $\vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

3. (a) Encuentre todos los números k tal que es siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

   $$kx + 5y = 0, \qquad 3x + (2+k)y = 0.$$

   Qué pasa para los otros k?

   (b) Haga los mismo para el sistema

   $$kx + 2y = 5, \qquad 3x + (2+k)y = -3.$$

4. Repita el ejercicio anterior pero con el sistema $kx + 2y = 0,\ 2x - (3+k)y = 0$ en el literal (a) y $kx + 2y = 6,\ 2x - (3+k)y = -3$ en el literal (b).

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto V con una *suma* $u+v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

(I) *asociatividad*: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todo $u, v, w \in V$,

(II) *conmutatividad*: $u+v = v+v$ para todo $u, v \in V$,

(III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbb{0} \in V$ tal que $\mathbb{0}+v = v$ para todo $v \in V$,

(IV) *elemento inverso*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\widetilde{v} \in V$ tal que $v+\widetilde{v} = \mathbb{0}$,

(V) $1v = v$.

(VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,

(VII) *distributividad*: $\lambda(v+u) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

4. Demuestre lo siguiente:

(a) El elemento neutral es único.
(b) $0v = \mathbb{0}$ para todo $v \in V$.
(c) $\lambda\mathbb{0} = \mathbb{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ es único.
(e) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ cumple $\widetilde{v} = (-1)v$.

5. De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 0$.
(e) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.