Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 13

Complemento ortogonal. Fecha de entrega: 14 de noviembre de 2019

1. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

   Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

   (a) Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

   (b) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Encuentre una base de $U^\perp$.

3. (a) Sea $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

      (I) Sea $\vec{v} = (0, 2, 5)^t$. Ecuentre el punto $\vec{x} \in U$ que esté más cercano a $\vec{v}$ y calcule la distancia entre $\vec{v}$ y $\vec{x}$.

      (II) ¿Hay un punto $\vec{y} \in U$ que esté a una distancia máximal de $\vec{v}$?

      (III) $*$ Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

   (b) Sea $W = \operatorname{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t,\ (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

      (I) Encuentre una base ortogonal de W.

      (II) Sean $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^t$, $\vec{a}_2 = (11, 4, 4, -3)^t$, $\vec{a}_3 = (0, -1, -1, 0)^t$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $\vec{w}_j \in W$ que esté más cercano a $\vec{a}_j$ y calcule la distancia entre $\vec{a}_j$ y $\vec{w}_j$.

      (III) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

4. Encuentre una base ortonormal de $U^\perp$ donde $U = \operatorname{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

5. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.

   (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

6. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

(a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

(b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.

(c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.

(d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

7. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \vec{x}\,, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t,\ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

(b) Sea V el espacio de todas la funciones continuas $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V:

$$\langle \vec{f}\,, \vec{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } f, g \in V. \tag{1}$$

(c) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1,\ v_n(x) = \sin(n\pi x),\ w_n(x) = \cos(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el product interno definido en (1).

(d) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1,\ p_1 = x,\ p_2 = x^2,\ p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en (1).

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *poliniomo j-ésimo de Legendre.*

8. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax\,, y \rangle = \langle x\,, A^*y \rangle \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

9. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

(a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).

(b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to V$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

(I) $\langle x + \lambda y\,, z \rangle = \langle x\,, z \rangle + \lambda \langle y\,, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(II) $\langle x\,, z \rangle = \overline{\langle x\,, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(III) $\langle x\,, x \rangle \geq 0$,

(IV) $\langle x\,, x \rangle = 0 \iff x = 0$, Observe:

- (i) y (iii) implican $\langle x\,,\lambda y+z\rangle=\overline{\lambda}\langle x\,,y\rangle+\langle x\,,z\rangle$,
- (ii) implica que $\langle x\,,x\rangle\in\mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ y sean $x,y\in V$. Entonces x *es ortogonal a* y si y solo si $\langle x\,,y\rangle=0$. Notación en este caso: $x\perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercio 13.5.

Definición. Sean U,V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T:U\to V$ se llama *isometría* si para todo $u\in U$

$$\|Tu\|_V=\|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu=0$, entonces $\|u\|_U=\|Tu\|_V=0$, por tanto $u=0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.