Álgebra lineal

Taller 11

Cambio de bases.

Fecha de entrega: 31 de octubre de 2019

---

1. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escriba los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\mathcal{B}$.

2. Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las matrices

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en términos de la base $\mathcal{B}$.

3. Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

   (a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

   (c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

4. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

(a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(c) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(d) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.