

Álgebra lineal

Taller 6

Matrices elementales; determinantes.

Fecha de entrega: 19 de septiembre de 2019

1. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene exactamente una solución para \vec{x} .
- Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene infinitas soluciones para \vec{x} .
- Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene ninguna solución para \vec{x} .
- Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de (*).
- Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de (*) donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. De las siguientes matrices calcule la determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Para las siguientes matrices encuentre matrices elementales E_1, \dots, E_n tal que $E_1 \cdot E_2 \cdots E_n A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Escribe la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales y calcule el determinante de A usando las matrices elementales encontradas.

5. Falso o verdadero? Pruebe sus respuestas.

- Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
- Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica.
- Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.

- (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
 - (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es simétrica.
 - (g) $AA^t = A^tA$.
6. (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.
- (b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.
7. (a) Sea $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.
- (b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.