Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores. Fecha de entrega: 28 de febrero de 2019

1. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(vector):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.

   (b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \| \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

4. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

   (b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

5. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(matriz):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
   Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

   (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

(b) Calcule, usando el resultado de (a), cuantos chocolates y cuantas mentas contienen:

(i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,
(ii) 4 cajas de tipo A y 2 de tipo B,
(iii) 2 caja de tipo A y 6 de tipo B,
(iv) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

(c) Determine si es posible conseguir

(i) 5 chocolates y 15 mentas,
(ii) 2 chocolates y 11 mentas,
(iii) 21 chocolates y 23 mentas,
(iv) 14 chocolates y 19 mentas.

comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

8. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in M(m \times n)$ y sea e_k el k-ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule Ae_k para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A.

(b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).

(c) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{x} = \vec{0}$.

(e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

9. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector e_1 a $\vec{v}$ y el vector e_2 a $\vec{w}$.
(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a e_1 y el vector $\vec{w}$ a e_2.

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

10. (a) Sean $A \in M(m, n)$, $B, C \in M(n, k)$, $D \in M(k, l)$.

(I) Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.
(II) Demuestre que $A(BD) = (AB)D$.

(b) Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \quad \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$