Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 3

Planos y rectas en $\mathbb{R}^3$; Eliminación de Gauß y Gauß-Jordan. Fecha de entrega: 29 de agosto de 2019

1. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P, determine:
   - si L_1 y L_2 son paralelas,
   - si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
   - si P pertenece a L_1 y/o a L_2,
   - una recta paralela a L_2 que pase por P.

   (a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, $\quad P(5, 2, 11)$.

   (b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad L_2 : x = t + 1,\ y = 3t - 4,\ z = -t + 2$, $\quad P(5, 7, 2)$.

2. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

   (a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a E.

   (b) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en E que no son paralelos entre si.

   (c) Encuentre un punto en E y un vector $\vec{n}$ que es ortogonal a E.

   (d) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

3. Para los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, -1)$ y los siguientes planos E:
   - Encuentre la ecuación del plano.
   - Determine si P pertenece al plano.
   - Encuentre una recta que esté ortogonal a E y que contenga al punto Q.

   (I) E es el plano que contiene al punto $A(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (II) E es el plano que contiene los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 2, 4)$.

   (III) E es el plano que contiene el punto $A(1, 0, 1)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Considere el plano $E : 2x - y + 3z = 9$ y la recta $L : x = 3t + 1,\ y = -2t + 3,\ z = 5t$.

   (a) Encuentre $E \cap L$.

   (b) Encuentre una recta G que no intersecta el plano E ni la recta L. Pruebe su afirmación. Cúantas rectas con esta propiedad hay?

5. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

   (a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E.

(b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$.

(c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores $c_\parallel$ y $c_\perp$ tal que $c_\parallel$ es paralelo a E, $c_\perp$ es ortogonal a E y $c = c_\parallel + c_\perp$.

6. Use la eliminición de Gauß o Gauß-Jordan para encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 28, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 13, \\ x_1 - 2x_2 &= -4, \\ 4x_1 + 5x_2 &= 23. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= -9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 19. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= -13, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 21, \\ 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 13. \end{aligned}$$

7. (a) En una panadería hay café, té, palito de queso y brownie. El primer cliente compra un café, un brownie y dos palitos de queso. Paga 12.000 pesos. El segundo cliente compra un té, un café y dos brownies. Paga 11.500 pesos. Después entran dos grupos de personas. El primer grupo pide 3 cafés, 4 tés, 3 palitos de queso y 5 brownies. En total pagan 42.000 pesos. El otro grupo pide 5 cafés, un té, 4 palitos de queso y 3 brownies y paga 37.000 pesos.

¿Cuánto cuestan los productos café, té, palito de queso y brownie en la panadería?

(b) En un café un cliente pide dos espresos y 1 muffin y paga 7 euros. Un grupo de amigos pide 5 espresos y 6 muffins. Otro grupo pide 3 espresos y 4 muffins y paga 10 euros menos que el primer grupo. Determine cuánto cuestan el espreso y el muffin.

8. Sea E un plano en $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ vectores paralelos a E, pero no paralelos entre sí. Demuestre:

(I) para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el vector $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ es paralelo al plano;

(II) que para cualquier vector $\vec{v}$ paralelo al plano existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.