Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 2

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Fecha de entrega: 22 de agosto de 2019 en la clase magistral

1. Para los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

   (c) $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$, (d) $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

2. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}\alpha\\-2\end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\2\end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}\alpha\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\2\end{pmatrix}$,

   (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}\alpha\\-2\end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix}\alpha\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\2\end{pmatrix}$.

3. (a) Calcule el área del paralelogramo con los vértices adyacentes $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,2,-5)$.

   (b) Calcule el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$.

4. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (I) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$,

   (II) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$.