

Álgebra lineal

Taller 1

Vectores en \mathbb{R}^2 .

Fecha de entrega: 15 de agosto de 2019

1. Sean $P(2, 3)$, $Q(-1, 4)$ puntos en \mathbb{R}^2 y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en \mathbb{R}^2 .

- (a) Calcule \overrightarrow{PQ} .
- (b) Calcule \overline{PQ} .
- (c) Calcule $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$.
- (d) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a \vec{v} .

2. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de \vec{v} .
- (b) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que tienen la misma dirección que \vec{v} .
- (c) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que \vec{v} y que tienen doble longitud de \vec{v} .
- (d) Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a \vec{v} .

3. (a) Encuentre todos los números k tal que es siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 2y = 0, \quad 2x - (3 + k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros k ?

(b) Haga lo mismo para el sistemas

$$kx + 2y = 6, \quad 2x - (3 + k)y = -3.$$

Recuerde que un *espacio vectorial sobre \mathbb{R}* es un conjunto V con una *suma* $u + v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

- (I) *asociatividad*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$,
- (II) *conmutatividad*: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$,
- (III) *elemento neutral*: Existe un $0 \in V$ tal que $0 + v = v$ para todo $v \in V$,
- (IV) *elemento inverso*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\tilde{v} \in V$ tal que $v + \tilde{v} = 0$,
- (V) $1v = v$.
- (VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,
- (VII) *distributividad*: $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

4. Demuestre lo siguiente:

- (a) El elemento neutral es único.
- (b) $0v = 0$ para todo $v \in V$.
- (c) $\lambda 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (d) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} es único.
- (e) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} cumple $\tilde{v} = (-1)v$.

5. De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

- (a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
- (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
- (c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 0$.
- (e) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.