Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 15

Diagonalización de matrices; secciones cónicas. Fecha de entrega:

---

1. Para cada una de las siguientes matrices, determine si son diagonalizables. Si lo es, encuentre una D que es semejante. $D = CAC^{-1}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre una substitción ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones de $F(x_1, x_2) = 1$ y $F(x_1, x_2) = 0$.

   (a) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$,
   (b) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2$,
   (c) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$,
   (d) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2$.

3. Encuentre una substitción ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones. Si es un elipse, calcule las longitudes de las ejes principales y el ángulo que tienen con el eje x. Si es una hipérbola, calcule en ángulo que tiene las asíntotas con el eje x.

   (a) $10x^2 - 6xy + 2y^2 = 4$,
   (b) $x^2 - 9y^2 = 2$,
   (c) $x^2 - 9y^2 = 20$ (compare la solución con la del literal anterior!)
   (d) $11x^2 - 16xy - y^2 = 30$.
   (e) $x^2 + 4xy + 4^2 = 4$.

4. (a) Demuestre que la solución de $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ es una (posiblemente degenerada o vacía)
      (I) elipse si $b^2 - 4ac < 0$,
      (II) hipérbola si $b^2 - 4ac > 0$,
      (III) parábola si $b^2 - 4ac = 0$.

   (b) Encuentre la sección cónica dada por $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 3x + 2y = 13$.