

# Álgebra lineal

1. (a) Sean  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  y sea  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ . Demuestre que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  y escriba los vectores  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en términos de la base  $\mathcal{B}$ .

2. Sean  $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Demuestre que  $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$  es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las matrices

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en términos de la base  $\mathcal{B}$ .

3. (a) Demuestre que la siguiente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), \quad \Phi(A) = A^t$$

- (b) Sea  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  la base estandar<sup>1</sup> de  $M(2 \times 2)$ . Encuentre la matriz que representa a  $\Phi$  con respecto a esta base.

- (c) Sean  $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y sea  $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$ . Demuestre que  $\mathcal{C}$  es una base de  $M(2 \times 2)$  y escriba  $\Phi$  como matriz con respecto a esta base.

4. (a) Demuestre que  $T : P_3 \rightarrow P_3$ ,  $Tp = p'$  es una función lineal.  
 (b) Determine  $\ker(T)$ ,  $\text{Im}(T)$ ,  $\dim(\ker(T))$ ,  $\dim(\text{Im}(T))$ .  
 (c) Sea  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$  la base estandar de  $P_3$ . Encuentre la matriz que representa a  $T$  con respecto a esta base.  
 (d) Sean  $q_1 = X+1$ ,  $q_2 = X-1$ ,  $q_3 = X^2+X$ ,  $q_4 = X^3+1$ . Demuestre que  $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  es una base de  $P_3$ .  
 (e) Encuentre la matriz con respecto a la base  $\mathcal{C}$  que representa a  $T$ .

5. Sean  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  y sean  $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ .

- (a) Demuestre que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son bases de  $\mathbb{R}^2$ .  
 (b) Sea  $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Encuentre  $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$  y  $\vec{x}$  (en la representación estandar).  
 (c) Sea  $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Encuentre  $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$  y  $\vec{y}$  (en la representación estandar).

<sup>1</sup> $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  (dados en coordenadas cartesianas).

- (a) Si se sabe que  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , es posible calcular  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.
- (b) Si se sabe que  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , es posible calcular  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.
- (c) ¿Existen  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  tal que  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.
- (d) ¿Existen  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  tal que  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.