Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 9

Bases y dimensión.

Fecha de entrega: 28 de marzo de 2019

---

1. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

   (a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{R}^2.$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(2 \times 2).$

   (c) $p_1 = 1 + x, \ p_2 = x + x^2, \ p_3 = x^2 + x^3, \ p_4 = 1 + x + x^2 + x^3; \quad P_3.$

2. (a) (i) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

   (ii) Complete la base encontrado en (i) a una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

   (i) Demuestre que F es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

   (ii) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

   (iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

   (c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

   (i) Demuestre que G es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

   (ii) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

   (iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

3. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

   Determine si estos vectoren generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

   (b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

   Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2. Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

   (c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3.

4. Determine si $\text{gen}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ para

   $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \ a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

5. Para los siguientes conjuntos, determine si son espacios vectoriales. Si lo son, calcule su dimensión.

   (a) $M_1 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ es triangular superior}\}$.

   (b) $M_2 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ tiene zeros en la diagonal}\}$.

(c) $M_3 = \{A \in M(n \times n) : A^t = -A\}$.

(d) $M_4 = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$.

6. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V, determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 3x$, $p_3 = x^2 + 2x - 5$, $p_4 = x^3 + 3x + 2$.

(c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{u_1, \dots u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \operatorname{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}$.

(d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \to W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \operatorname{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \operatorname{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. Es verdad si A no es invertible?