Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales; generadores de espacios vectoriales;
sistemas linealmente (in)dependientes.

Fecha de entrega: 21 de marzo de 2019

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.
   (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

2. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

3. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.
   (a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
   (b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   (c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq 0\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?
   (d) ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?
   (e) ¿Los conjuntos
   $$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$
   son subespacios de $\mathbb{R}^k$?

4. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de v_1 y v_2.
   (b) ¿Es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?
   (c) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de
   $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$?

5. (a) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?
   (b) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?
   (c) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2? Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?

(d) ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?

6. (a) Es F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$. Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

(b) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{v_1, v_2\}$. Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.

(c) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de v_1 y v_2, tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, w\} = E$.

(d) Encuentre un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$.

7. (a) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

(b) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

(c) ¿El siguiente conjunto genera los matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero?

(a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces que z es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k, u$.

(b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces $v_1, \dots, v_k, u$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los $v_2, \dots, v_k$.

9. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Demuestre que X con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

De los siguientes subconjuntos de X, diga si son subespacios de X.

(I) Todas las funciones acotadas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

(II) Todas las funciones constantes.

(III) Todas las funciones continuas.

(IV) Todas las funciones continuas con $f(3) = 0$.
(V) Todas las funciones continuas con $f(3) = 4$.
(VI) Todas las funciones con $f(3) > 0$.
(VII) Todas las funciones pares.
(VIII) Todas las funciones impares.
(IX) Todos los polinomios.
(X) Todas las funciones nonegativas.
(XI) Todos los polinomios de grado ≥ 4.

10. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $M(m \times n, \mathbb{R})$ con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

De los siguientes subconjuntos de $M(n \times n)$, diga si son subespacios.

(I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
(II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
(III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
(IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $n = m$.

(V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$) si $n = m$.
(VI) Todas las matrices que no son simétricas.
(VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$) si $n = m$.
(VIII) Todas las matrices diagonales.
(IX) Todas las matrices triangular superior.
(X) Todas las matrices triangular inferior.
(XI) Todas las matrices invertibles.
(XII) Todas las matrices no invertibles.
(XIII) Todas las matrices con $\det A = 1$.

11. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \to V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \qquad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:
Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \to V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \qquad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.