

# Álgebra lineal

## Taller 1

Vectores en  $\mathbb{R}^2$ .

Fecha de entrega: 31 de enero de 2019

---

1. Sean  $P(2, 3)$ ,  $Q(-1, 4)$  puntos en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  un vector en  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Calcule  $\overrightarrow{PQ}$ .
- (b) Calcule  $\overline{PQ}$ .
- (c) Calcule  $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$ .
- (d) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a  $\vec{v}$ .

2. Sea  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de  $\vec{v}$ .
- (b) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que tienen la misma dirección que  $\vec{v}$ .
- (c) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que  $\vec{v}$  y que tienen doble longitud de  $\vec{v}$ .
- (d) Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a  $\vec{v}$ .

3. (a) Encuentre todos los números  $k$  tal que es siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 2y = 0, \quad 2x - (3 + k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros  $k$ ?

- (b) Haga lo mismo para el sistemas

$$kx + 2y = 6, \quad 2x - (3 + k)y = -3.$$

Recuerde que un *espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$*  es un conjunto  $V$  con una *suma*  $u + v \in V$  para  $u, v \in V$  y un *producto*  $\lambda v \in V$  para  $v \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que los siguiente se tiene:

- (I) *asociatividad*:  $(u + v) + w = u + (v + w)$  para todo  $u, v, w \in V$ ,
- (II) *conmutatividad*:  $u + v = v + u$  para todo  $u, v \in V$ ,
- (III) *elemento neutral*: Existe un  $0 \in V$  tal que  $0 + v = v$  para todo  $v \in V$ ,
- (IV) *elemento inverso*: Para todo  $v \in V$  existe un elemento  $\tilde{v} \in V$  tal que  $v + \tilde{v} = 0$ ,
- (V)  $1v = v$ .
- (VI) *compatibilidad*:  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ ,
- (VII) *distributividad*:  $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v, u \in V$ ,  
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $v \in V$ .

4. Demuestre lo siguiente:

- (a) El elemento neutral es único.
- (b)  $0v = 0$  para todo  $v \in V$ .
- (c)  $\lambda 0 = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (d) Dado  $v \in V$ , su inverso  $\tilde{v}$  es único.
- (e) Dado  $v \in V$ , su inverso  $\tilde{v}$  cumple  $\tilde{v} = (-1)v$ .

5. De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

- (a)  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ ,
- (b)  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ ,
- (c)  $V$  es el conjunto de todas las funciones continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (d)  $V$  es el conjunto de todas las funciones  $f$  continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(4) = 0$ .
- (e)  $V$  es el conjunto de todas las funciones  $f$  continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(4) = 1$ .