

Álgebra lineal

1. Dados la matriz A y los vectores u y w :

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Diga si los vectores u y w son autovectores de A . Si lo son, cuáles son los vectores propios correspondientes?
- (b) Puede usar que $\det(A - \lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 138\lambda + 280$. Calcule todos los autovalores de A .
2. Para las siguientes matrices, encuentre los vectores propios, los espacios propios, una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

4. (a) Sea $\Phi : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^t$. Encuentre los valores propios y los espacios propios de Φ .
- (b) Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Encuentre los valores propios y los espacios propios de $T : P_2 \rightarrow P_2$, $Tp = p' + 3p$.
- (c) Sea R la reflexión en el plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en \mathbb{R}^3 . Calcule los valores propios y los espacios propios de R .
5. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayores a 0. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno estándar en \mathbb{C}^n . Demuestre que A induce un producto interno en \mathbb{C}^n a través de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n .