

# Álgebra lineal

1. Sean  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Demuestre que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de  $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .
- (b) Demuestre que  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  y  $\vec{d}$  son linealmente independientes. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de  $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\} \subseteq \mathbb{R}^5$ . Encuentre una base de  $U^\perp$ .

2. (a) Sea  $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

- (i) Sea  $\vec{v} = (0, 2, 5)^t$ . Encuentre el punto  $\vec{x} \in U$  que esté más cercano a  $\vec{v}$  y calcule la distancia entre  $\vec{v}$  y  $\vec{x}$ .
- (ii) Hay un punto  $\vec{y} \in U$  que esté a una distancia máxima de  $\vec{v}$ ?
- (iii) \* Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre  $U$  (en la base estándar).

(b) Sea  $W = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t, (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- (i) Encuentre una base ortogonal de  $W$ .
- (ii) Sean  $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^t$ ,  $\vec{a}_2 = (11, 4, 4, -3)^t$ ,  $\vec{a}_3 = (0, -1, -1, 0)^t$ . Para cada  $j = 1, 2, 3$  encuentre el punto  $\vec{w}_j \in W$  que esté más cercano a  $\vec{a}_j$  y calcule la distancia entre  $\vec{a}_j$  y  $\vec{w}_j$ .
- (iii) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre  $W$  (en la base estándar).

3. Encuentre una base ortonormal de  $U^\perp$  donde  $U = \text{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .

4. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en  $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

(b) Sea  $V$  el espacio de todas las funciones continuas  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Claramente  $V$  es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en  $V$ :

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V.$$

(c) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en  $C[0, 1]$  con el product interno definido en Problema 13.4.

- (d) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ ,  $p_2 = x^2$ ,  $p_3 = x^3$  para obtener una base ortonormal  $\{q_0, \dots, q_3\}$  de  $P_3$  con el product interno definido en Problema 13.4.

*Observación.* Salvo constantes multiplicativos, el polinomio  $q_j$  es el *polinomio  $j$ -ésimo de Legendre*.

5. Sea  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ . Demuestre que  $A^*$  es la única matriz con

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $Q, T \in M(n \times n)$ .

- (a) Demuestre que  $T$  es una isometría si y solo si  $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (es decir: una isometría mantiene ángulos).
- (b) Demuestre que  $Q$  es una matriz ortogonal si y solo si  $Q$  es una isometría.

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Un *producto interno* es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  tal que para todo  $x, y, z \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

- (I)  $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ , (Linealidad en la primera componente)
- (II)  $\langle x, z \rangle = \overline{\langle x, z \rangle}$  (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
- (III)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- (IV)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ,

Observe:

- (i) y (iii) implican  $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,
- (ii) implica que  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y sean  $x, y \in V$ . Entonces  $x$  es *ortogonal a  $y$*  si y solo si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Notación en este caso:  $x \perp y$ .

**Ejemplos.** El producto punto en  $\mathbb{R}^n$  es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 13.4.

**Definición.** Sean  $U, V$  espacios vectoriales con normas  $\|\cdot\|_U$  y  $\|\cdot\|_V$ . Una función lineal  $T : U \rightarrow V$  se llama *isometría* si para todo  $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si  $Tu = 0$ , entonces  $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$ , por tanto  $u = 0$ ).

**Ejemplos.**

- Rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ .
- Reflexiones en  $\mathbb{R}^n$ .