

Álgebra lineal

1. Para los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 , calcule las dimensiones y los complementos ortogonales:

- (a) $F = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t\}$,
- (b) $G = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t, (1, 0, 1, 0)^t\}$,
- (c) $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$,
- (d) $J = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t, (1, 0, 1, 0)^t, (0, 2, 1, 0)^t\}$,
- (e) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0\}$,

2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Demuestre que \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

3. Sean \vec{a}, \vec{b} como en el ejercicio anterior y sea $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (a) Encuentre una fórmula para P_U (la proyección ortogonal sobre U).
- (b) Calcule $P_U \vec{x}$ y $P_U \vec{y}$ para los vectores $\vec{x} = (8, 3, 2, 1)$ y $\vec{y} = (1, 0, 1, 4)$.

4. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que \vec{v}_1, \vec{v}_2 es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .
- (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
- (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

5. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

- (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
- (b) Demuestre que $\dim U + \dim W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.
- (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.
- (d) Demuestre que U^\perp es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.