Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 10

Kernels, imágines de funciones lineales;
fórmula de dimensión.

Fecha de entrega: 26 de octubre de 2018

1. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa como actuan geométricamente en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuja $\operatorname{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricas son.
   (c) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Im}(FA)$, $\operatorname{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cual es la relación entre ellos.
   (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cual es la relación entre ellos.

3. De los siguientes matrices, calcule kernel, imagen y las dimensiones correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:
   (i) A inyectiva $\implies m \geq n$.
   (ii) A sobreyectiva $\implies n \geq m$.

   Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

5. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es invertible. Demuestre que $m = n$.

6. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.
   (a) Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\operatorname{Im} A$?
   (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0,\ \dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

7. (a) Encuentre por lo menos dos funciones diferentes lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.
   (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 2$?