

# Álgebra lineal

## Taller 8

Espacios vectoriales; generadores de espacios vectoriales; sistemas linealmente (in)dependientes.

Fecha de entrega: 12 de octubre de 2018

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $V$  el conjunto de las matrices simétricas  $n \times n$  con la suma y producto con  $\lambda \in \mathbb{R}$  usual.

- (a) Demuestre que  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- (b) Encuentre matrices que generan  $V$ . ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar  $V$ ?

2. Sea  $U$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $\mathbb{R}^n \setminus U$  no es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

3. Sean  $A \in M(m \times n)$  y sea  $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ .

- (a) Demuestre que  $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ .
- (b) Demuestre que  $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) ¿Los conjuntos  $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$  y  $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq 0\}$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$ ?
- (d) ¿El conjunto  $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^k$ ?
- (e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de  $\mathbb{R}^k$ ?

4. (a) Sean  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Escriba  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  como combinación lineal de  $v_1$  y  $v_2$ .

(b) ¿Es  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  combinación lineal de  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

(c) ¿Es  $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$  combinación lineal de

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}?$$

5. (a) ¿Los vectores  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^3$ ?

(b) ¿Los vectores  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^3$ ?

(c) ¿Los vectores  $p_1 = X^2 - X + 2$ ,  $p_2 = X + 3$ ,  $p_3 = X^2 - 1$  son linealmente independientes en  $P_2$ ? Son linealmente independientes en  $P_n$  para  $n \geq 3$ ?

- (d) ¿Los vectores  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  son linealmente independientes en  $M(2 \times 3)$ ?
6. (a) Es  $F$  el plano dado por  $F : 2x - 5y + 3z = 0$ . Demuestre que  $F$  es subespacio de  $\mathbb{R}^3$  y encuentre vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$ .
- (b) Sean  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Sea  $E$  el plano  $E = \text{gen}\{v_1, v_2\}$ . Escriba  $E$  en la forma  $E : ax + by + cz = d$ .
- (c) Encuentre un vector  $w \in \mathbb{R}^3$ , distinto de  $v_1$  y  $v_2$ , tal que  $\text{gen}\{v_1, v_2, w\} = E$ .
- (d) Encuentre un vector  $v_3 \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$ .

7. (a) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas  $2 \times 2$ ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

- (b) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas  $2 \times 2$ ?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

- (c) ¿El siguiente conjunto genera las matrices triangulares superiores  $2 \times 2$ ?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Sea  $V$  un espacio vectorial. Falso o verdadero?

- (a) Suponga  $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$  tal que  $z$  es combinación lineal de los  $v_1, \dots, v_k$ . Entonces que  $z$  es combinación lineal de  $v_1, \dots, v_k, u$ .
- (b) Si  $u$  es combinación lineal de  $v_1, \dots, v_k \in V$ , entonces  $v_1, \dots, v_k, u$  es un sistema de vectores linealmente dependientes.
- (c) Si  $v_1, \dots, v_k \in V$  es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces  $v_1$  es combinación lineal de los  $v_2, \dots, v_k$ .

9. Sea  $X$  el conjunto de todas las funciones de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ . Demuestre que  $X$  con la suma y producto con números en  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial.

De los siguientes subconjuntos de  $X$ , diga si son subespacios de  $X$ .

- (i) Todas las funciones acotadas de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Todas las funciones constantes.
- (iii) Todas las funciones continuas.

- (iv) Todas las funciones continuas con  $f(3) = 0$ .
- (v) Todas las funciones continuas con  $f(3) = 4$ .
- (vi) Todas las funciones con  $f(3) > 0$ .
- (vii) Todas las funciones pares.
- (viii) Todas las funciones impares.
- (ix) Todos los polinomios.
- (x) Todas las funciones nonegativas.
- (xi) Todos los polinomios de grado  $\geq 4$ .

10. Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ . Demuestre que  $M(m \times n, \mathbb{R})$  con la suma y producto con números en  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial.

De los siguientes subconjuntos de  $M(n \times n)$ , diga si son subespacios.

- (i) Todas matrices con  $a_{11} = 0$ .
- (ii) Todas matrices con  $a_{11} = 3$ .
- (iii) Todas matrices con  $a_{12} = \mu a_{11}$  para un  $\mu \in \mathbb{R}$  fijo.
- (iv) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que  $n = m$ .

- (v) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices  $A$  con  $A^t = A$ ) si  $n = m$ .
- (vi) Todas las matrices que no son simétricas.
- (vii) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices  $A$  con  $A^t = -A$ ) si  $n = m$ .
- (viii) Todas las matrices diagonales.
- (ix) Todas las matrices triangular superior.
- (x) Todas las matrices triangular inferior.
- (xi) Todas las matrices invertibles.
- (xii) Todas las matrices no invertibles.
- (xiii) Todas las matrices con  $\det A = 1$ .

11. (a) Sea  $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y defina suma  $\oplus : V \times V \rightarrow V$  y producto con escalar  $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \quad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo  $x, y \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Demuestre que  $(V, \oplus, \odot)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:

Sea  $V$  un conjunto y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  una función biyectiva. Entonces  $V$  es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo  $x, y \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .