Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes.

Fecha de entrega: 28 de septiembre de 2018

---

1. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa y el determinante de la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

3. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

4. (a) Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$.

   (b) Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0,\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

   ¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

5. Sea $A \in M(n \times n)$.

   (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.